Zadania niepodległościowe

Ponieważ dzisiaj nie ma zajęć, ułożyłem listę zadań (niektóre z nich były poruszone na ćwiczeniach) i zachęcam do zastanawiania się nad nimi i rozwiązywania na kartkach; im więcej tym lepiej.

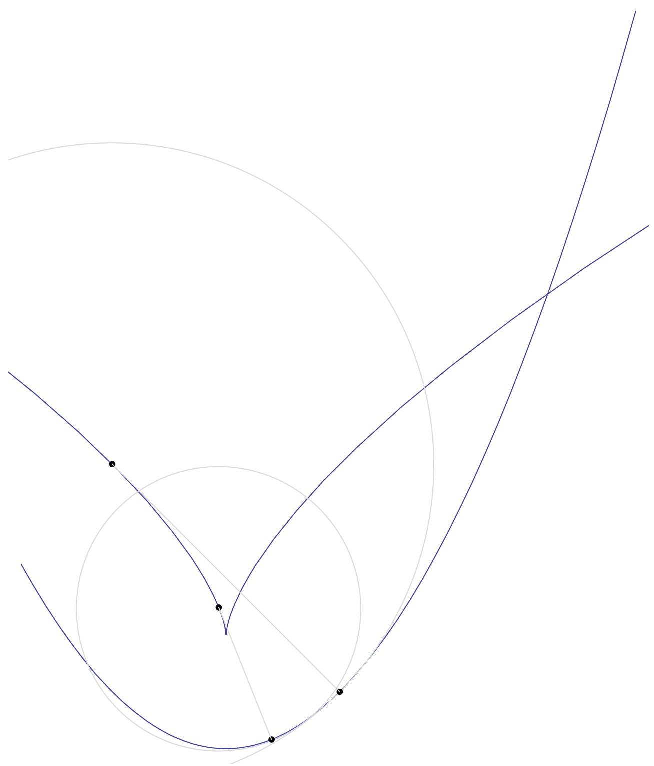
Szymon Toruńczyk

Zadania

Ewoluta krzywej Niech $\gamma(t)$ będzie parametryzacją łukową (tzn. taką, że $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$) krzywej gładkiej $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, $p = \gamma(t_0)$ punktem leżącym na krzywej Γ oraz ξ parametryzacją łukową pewnego okręgu, spełniającą własności:

- $\gamma(t_0) = \xi(t_0)$
- $\gamma'(t_0) = \xi'(t_0)$
- $\gamma''(t_0) = \xi''(t_0)$

Okrąg parametryzowany przez ξ nazywa się okręgiem ściśle stycznym do Γ w punkcie p. Jest on dobrze określony o ile $\gamma''(t_0) \neq 0$.



Rysunek 1: Ewoluta paraboli oraz dwa okręgi ściśle styczne

Ewolutą krzywej (niekoniecznie płaskiej) Γ o nieznikającej krzywiźnie jest krzywa składająca się ze środków okręgów ściśle stycznych do krzywej γ.

Zadanie 1. *Niech $\gamma(t)$ będzie parametryzacją łukową krzywej Γ. Wykaż, że jej ewoluta jest krzywą o parametryzacji*

$$\varepsilon(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)$$

gdzie $N(t)$ jest wektorem normalnym (tzn. $N(t) = \gamma''(t)/\|\gamma''(t)\|$).

Uwaga. *$\kappa(t)$ to krzywizna krzywej Γ w punkcie $\gamma(t)$. Podobnie $N(t)$ to wektor normalny w punkcie $\gamma(t)$. Innymi słowy, w zadaniu należy pokazać, że środek okręgu ściśle stycznego do krzywej Γ ma współrzędne zadane powyższym wzorem.*

Zadanie 2. *Znajdź krzywiznę i ewolutę hiperboli $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*

Uwaga. *Powyższa parametryzacja nie jest łukowa.*

Zadanie 3. *Znajdź krzywiznę i ewolutę spirali zadanej we współrzędnych biegunowych wzorem $r(\theta) = a^\theta$ dla danej stałej $a > 0$. Pokaż, że istnieje taka wartość parametru a, że krzywa ta jest swoją ewolutą.*

Wzory Freneta Niech $\gamma(t)$ będzie parametryzacją łukową krzywej gładkiej w $\mathbb{R}^3$, o nieznikającej krzywiźnie. Definiujemy wektory:

styczny $T = \gamma'$

normalny $N = \gamma''/\|\gamma''\|$

binormalny $B = T \times N$.

Wektory T, N, B tworzą bazę ortonormalną, zwaną *trójnogiem Freneta.*

Twierdzenie 1. *(Wzory Freneta) Pochodne wektorów T, N, B wyrażają się w bazie Freneta wzorami:*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

dla pewnych funkcji κ, τ zwanych krzywizną oraz torsją.

Zadanie 4. *Niech $\beta(s) = (\frac{(1+s)^{3/2}}{3}, \frac{(1-s)^{3/2}}{3}, \frac{s}{\sqrt{2}})$ dla $-1 < s < 1$. Oblicz współrzędne wektorów N oraz B oraz pokaż, że $\kappa = \tau$.*

Uwaga. *Powyższa parametryzacja nie jest łukowa.*

Zadanie 5. *Policz współrzędne wektora binormalnego oraz torsję krzywej zadanej przez parametryzację*

$$(sin(t), cosh(t), cos(t))$$

(cosh to kosinus hiperboliczny).

Zadanie 6. *a) Pokaż, że jeśli $\kappa > 0$ oraz $\tau = 0$ to krzywa jest płaska, czyli zawiera się w pewnej płaszczyźnie.*

b) Pokaż, że jeżeli dodatkowo $\kappa = const$ to krzywa jest łukiem okręgu. (Wskazówka: można skorzystać z twierdzenia mówiącego o tym, że krzywa o nieznikającej krzywiźnie jest zadana jednoznacznie z dokładnością do ruchu sztywnego przez funkcje krzywizny oraz torsji).

Zadanie 7. *Policz krzywiznę i torsję oraz kąt samoprzecięcia krzywej Vivaniego, powstałej przez przecięcie sfery $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ z cylindrem $(x-a)^2+y^2 = a^2$. (Wskazówka: $x = a\ cost + a, y = a\ sint$ parametryzują cylinder. Z równania sfery wylicz współrzędną z.)*